无需语言的证明 3

毕达哥拉斯定理的帕普斯推广形式

维维尼亚定理: 等边三角形内的一点到三边的距离之和, 等于三角形的高.

每个三角形均有无穷多个内接等边三角形.

通过三角形内心的直线平分三角形周长当且仅当它平分三角形的面积.

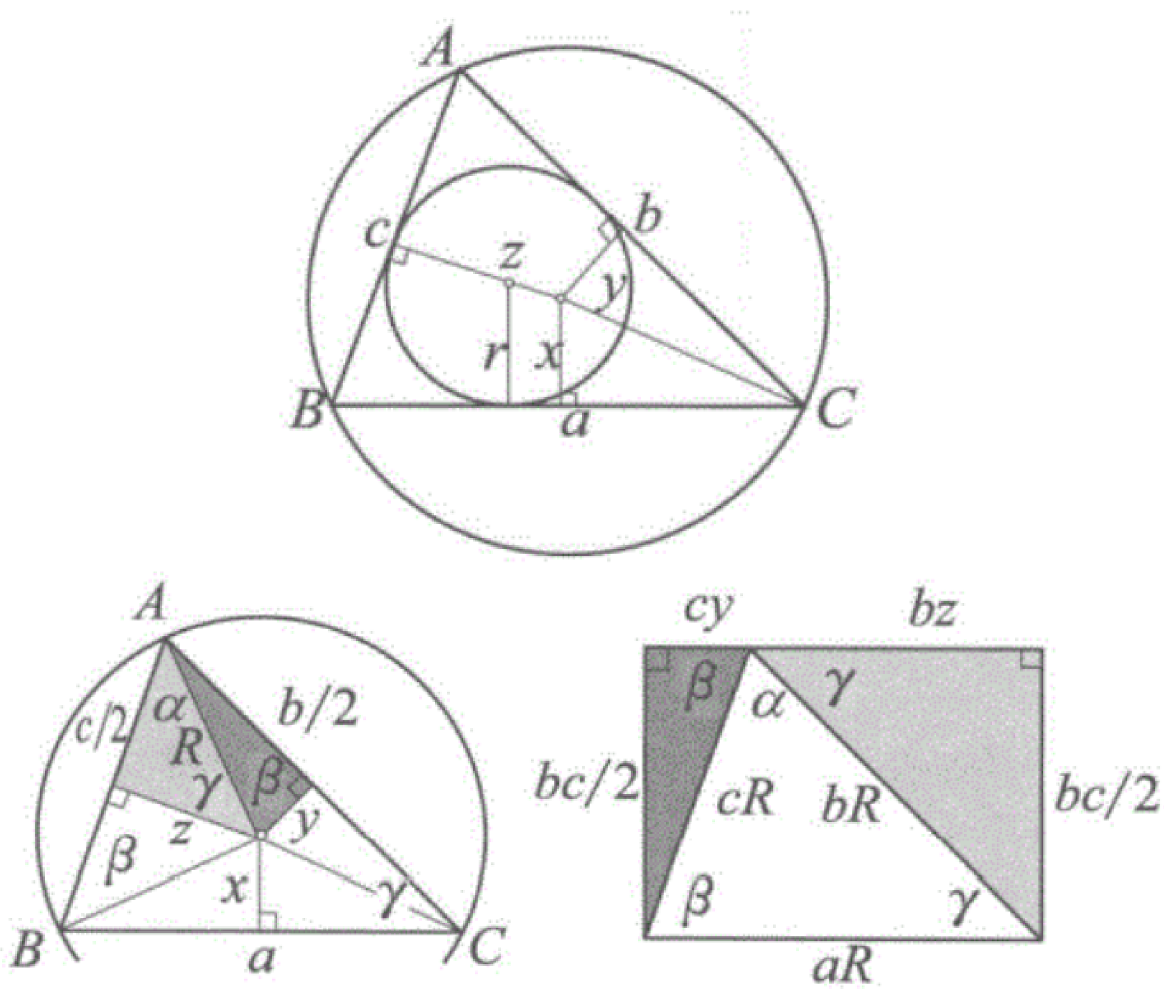
每个三角形均可分割为 6 个等腰三角形.

每个三角形均可分割为 4 个等腰三角形.

每个锐角三角形均可分割为 3 个等腰三角形.

一个三角形可以分割为 2 个等腰三角形当且仅当这个三角形有一个角是另一个角的三倍, 或这个三角形是直角三角形.

⭐ 锐角三角形的 **卡诺定理**.



$$ax+by+cz=r(a+b+c)$$

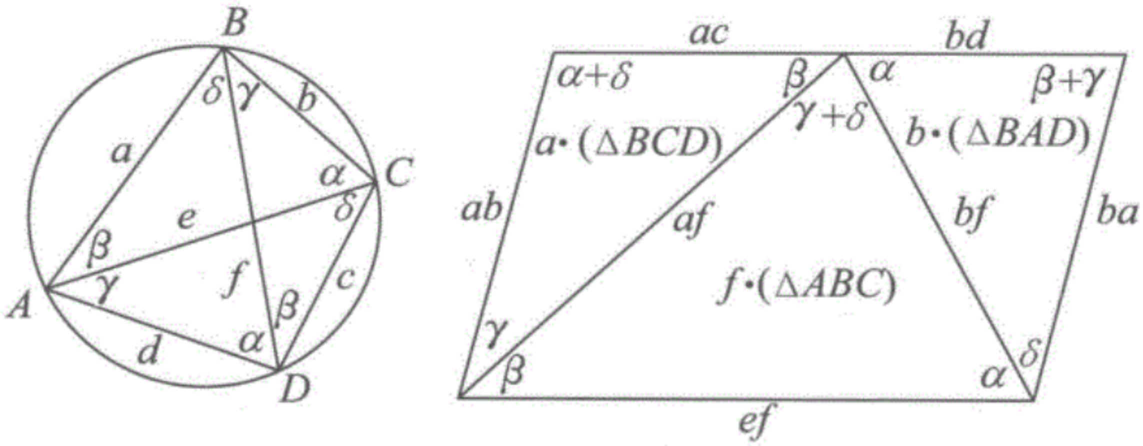
$$\begin{cases} cy+bz=aR, \\ az+cx=bR, \\ bx+ay=cR. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)(x+y+z)=(a+b+c)(R+r)$$

$$\Rightarrow \quad x+y+z=R+r$$

托勒密定理

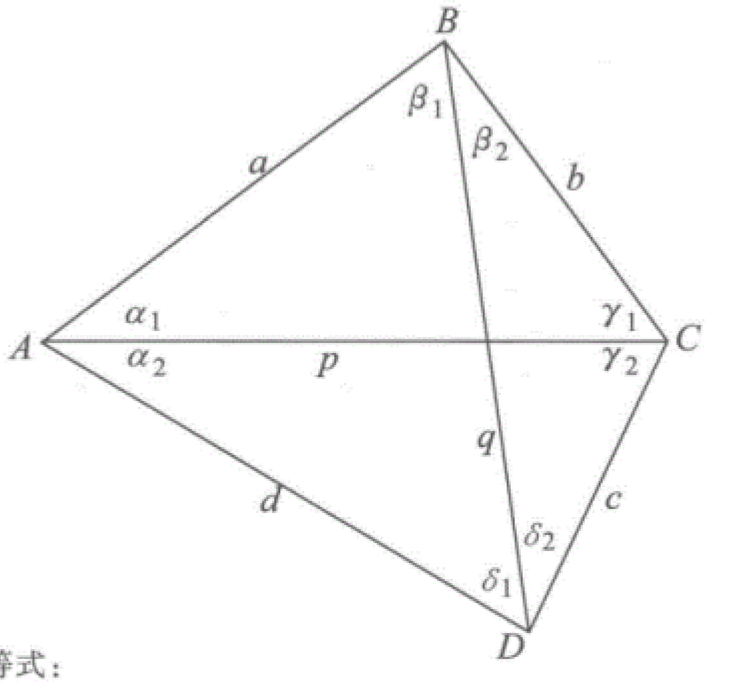
圆内接四边形的对角线乘积等于对边乘积的和.



$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$ $\qquad$ $ef=ac+bd$

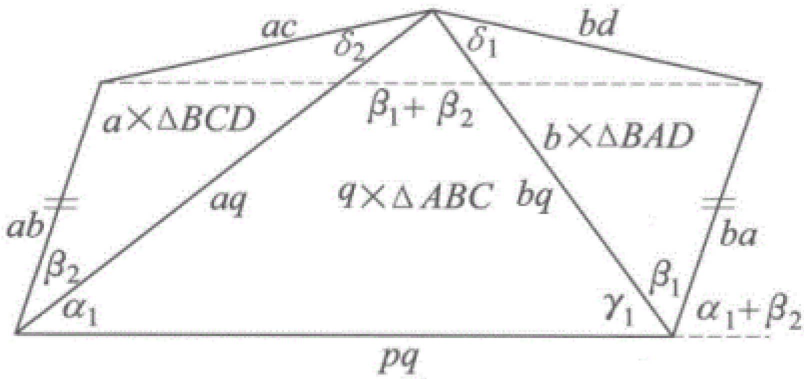
注 托勒密定理的直观证明

托勒密不等式



托勒密不等式：

若凸四边形边长顺次分别为 a、b、c、d，对角线长为 p、q，则 $pq \leqslant ac+bd$.



注 上图的 $\delta_2+\beta_1+\beta_2+\delta_1$ 小于 π，而折线段 $ac+bd$ 至少与平行四边形边长 pq 相等，对于圆内接四边形即 $\delta_2+\beta_1+\beta_2+\delta_1=\pi$ 时等号成立. 可以得到托勒密定理. 若圆内接凸四边形四条边长顺次为 a、b、c、d 对角线长为 p、q，则 $pq=ac+bd$.

代数恒等式

$$ax-by=\frac{1}{2}(a+b)(x-y)+\frac{1}{2}(x+y)(a-b).$$

坎迪多恒等式

$$[x^2+y^2+(x+y)^2]^2=2[x^4+y^4+(x+y)^4]$$

由此可以得到关于斐波那契数列的恒等式

$$[F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2]^2=2[F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4].$$

三角、微积分与解析几何

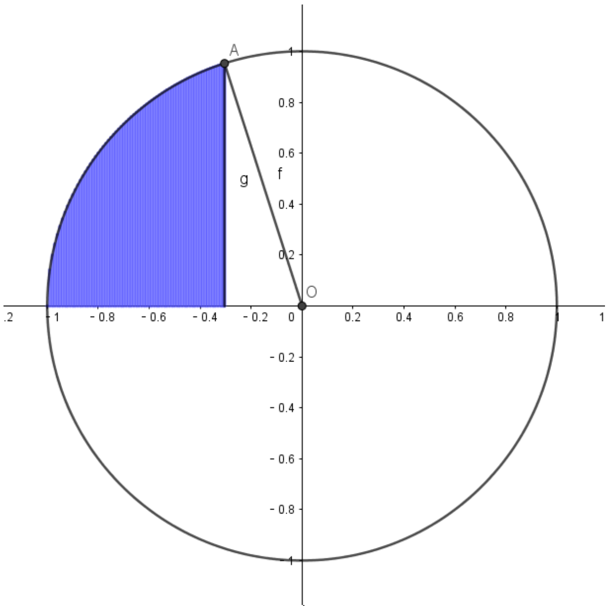
正弦函数的子可加性 (对于正角)

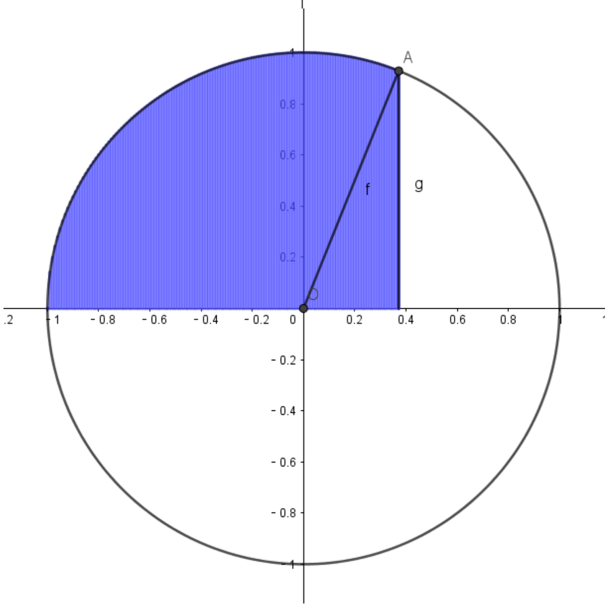
$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>1.$$

$$\alpha_k\ge 0,\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\le\pi \quad\Rightarrow\quad \sin\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\le\sum_{k=1}^{n}\sin\alpha_k.$$

定积分的几何的推导

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{a}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}a\right)+\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}\\
\Rightarrow\quad &\int\sqrt{1-a^2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\sin^{-1}ax+\frac{x}{2}\sqrt{1-a^2x^2}+C\\
\Rightarrow\quad &\int\sqrt{1+a^2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\sinh^{-1}ax+\frac{x}{2}\sqrt{1+a^2x^2}+C
\end{aligned}$$





$$
\begin{aligned}
&\cos x=\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}, &&\sin x=\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, &&\tan x=\frac{1}{i}\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}},\\
&\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, &&\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, &&\tanh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.\\
&\cos \mathrm{i}x=\cosh x, &&\sin \mathrm{i}x=\mathrm{i}\sinh x, &&\tan \mathrm{i}x=\mathrm{i}\tanh x,\\
&\cosh \mathrm{i}x=\cos x, &&\sinh \mathrm{i}x=\mathrm{i}\sin x, &&\tanh \mathrm{i}x=\mathrm{i}\tan x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\arccos x=\mathrm{i}\ln\left(\sqrt{1-x^2}-\mathrm{i}x\right), &&\arcsin x=\mathrm{i}\ln\left(\sqrt{1-x^2}+\mathrm{i}x\right) &&\arctan x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\\
&\operatorname{arch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), &&\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), &&\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\\
&\arccos x=\mathrm{i}\operatorname{arch} x, &&\arcsin \mathrm{i}x=\mathrm{i}\operatorname{arsh} x, &&\arctan \mathrm{i}x=\mathrm{i}\operatorname{arth} x,\\
&\arccos \mathrm{i}x=\mathrm{i}\operatorname{arch} \mathrm{i}x, &&\operatorname{arsh} \mathrm{i}x=\mathrm{i}\arcsin x, &&\operatorname{arth} \mathrm{i}x=\mathrm{i}\arctan x.
\end{aligned}
$$

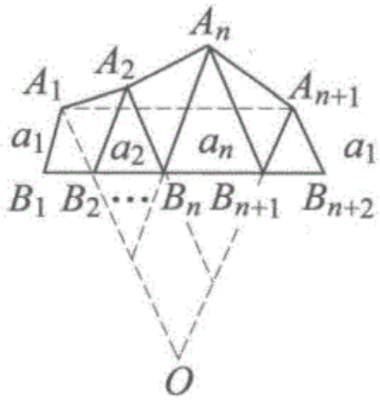
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c).$$

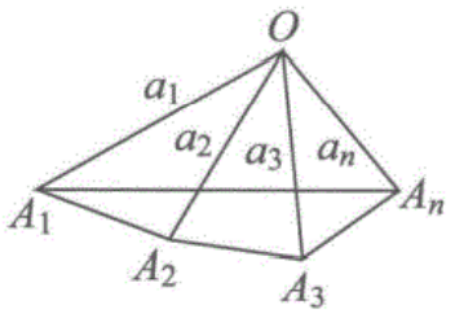
2000 年波罗的海数学奥林匹克竞赛试题

若 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n,\ n\in N,\ n\geq 2)$, $a_{n+1}=a_1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos\theta}\geq\sqrt{2(1-\cos\theta)}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos\theta}\geq\sqrt{a_1^2+a_n^2-2a_1a_n\cos(n-1)\theta}$$





整数求和

毕达哥拉斯三元组的分解式.

$$a^2+b^2=c^2\quad\Leftrightarrow\quad(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b).$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^2 = \binom{n+1}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n(n+k)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}.$$

$$\binom{n+m}{2} = \binom{b}{2} + \binom{m}{2} + mn.$$